

Finansiell styring

Forelesning 13 — Opsjoner II: prising

Christian Heyerdahl-Larsen

2026-08-05

Fra struktur til pris

- Forrige forelesning bygde **intuisjon** og struktur: hva en kjøpsopsjon (call) og en salgsopsjon (put) er, gevinstdiagrammer, og de fire grunnposisjonene
- Nå spør vi det vanskelige spørsmålet: *hva er en opsjon faktisk verdt i dag?*
- Vi skal se at prisen følger av et enkelt, men kraftig prinsipp — **arbitrasjefrihet**: to porteføljer med samme fremtidige kontantstrøm må koste det samme i dag
- Dette er BMN kapittel 12.3

Note

Rød tråd: vi priser ikke opsjonen ut fra hva vi *tror* om fremtiden, men ved å **kopiere** utbetalingen med aksjer og lån. Da forsvinner sannsynlighetene — og det er hele poenget.

Notasjon

Underliggende og opsjon

- A_0 = dagens aksjekurs (A_T ved forfall)
- I = innløsningskurs (exercise price)
- K_0 = verdien av en kjøpsopsjon i dag
- S_0 = verdien av en salgsopsjon i dag

Binomisk verden

- u = oppfaktor, n = nedfaktor
($u > 1 + r_f > n$)
- r_f = risikofri rente per periode
- q = sikringssannsynligheten for opp

Vi ser på **europaiske** opsjoner (innløses kun ved forfall) med mindre annet er sagt.

Hva må alltid være sant

Før vi regner ut en eksakt pris, kan vi spikre fast noen **grenser** som må gjelde i et marked uten arbitrasje. For en kjøpsopsjon:

- **Ikke-negativ:** $K_0 \geq 0$ — en opsjon er en rettighet, ikke en plikt, så den kan aldri være verdt mindre enn null

Hva må alltid være sant

Før vi regner ut en eksakt pris, kan vi spikre fast noen **grenser** som må gjelde i et marked uten arbitrasje. For en kjøpsopsjon:

- **Ikke-negativ:** $K_0 \geq 0$ — en opsjon er en rettighet, ikke en plikt, så den kan aldri være verdt mindre enn null
- **Øvre grense:** $K_0 \leq A_0$ — retten til å kjøpe aksjen kan ikke være verdt mer enn aksjen selv

Hva må alltid være sant

Før vi regner ut en eksakt pris, kan vi spikre fast noen **grenser** som må gjelde i et marked uten arbitrasje. For en kjøpsopsjon:

- **Ikke-negativ:** $K_0 \geq 0$ – en opsjon er en rettighet, ikke en plikt, så den kan aldri være verdt mindre enn null
- **Øvre grense:** $K_0 \leq A_0$ – retten til å kjøpe aksjen kan ikke være verdt mer enn aksjen selv
- **Nedre grense:** $K_0 \geq A_0 - \frac{I}{1 + r_f}$ – en kjøpsopsjon er minst verdt aksjekursen fratrasket nåverdien av innløsningskursen

Egenverdi og tidsverdi

Egenverdi (innløsningsverdi)

- For en kjøpsopsjon: $\max[0, A_0 - I]$
- Det opsjonen ville gitt om den ble innløst i dag
- En opsjon handles aldri *under* egenverdien — da ville arbitrasje vært mulig

Tidsverdi

- $K_0 - \max[0, A_0 - I]$
- Premien for *muligheten* for at kursen beveger seg gunstig før forfall
- Øker med tid til forfall og med volatiliteten i underliggende

Tips

Mer tid og mer usikkerhet gjør en opsjon **mer** verdt — nedsiden er begrenset til premien, mens oppsiden er åpen. Dette er den asymmetrien all opsjonsprising hviler på.

Sammenhengen mellom kjøps- og salgsopsjon

To porteføljer med **samme** utbetaling ved forfall må ha samme pris i dag. Sett opp:

Portefølje A

- Kjøp én kjøpsopsjon (K_0)
- Sett $\frac{I}{1 + r_f}$ i banken (risikofritt)
- Verdi ved forfall: $\max(A_T, I)$

Portefølje B

- Kjøp én salgsopsjon (S_0)
- Kjøp aksjen (A_0)
- Verdi ved forfall: $\max(A_T, I)$

Lik utbetaling i alle utfall gir $K_0 + \frac{I}{1 + r_f} = S_0 + A_0$, som omskrevet er **salg-kjøp-pariteten** (SKP, engelsk «put-call parity»):

$$K_0 - S_0 = A_0 - \frac{I}{1 + r_f}$$

Hva salg-kjøp-pariteten brukes til

- Finne prisen på en opsjon når den andre er kjent: kjenner vi K_0 , A_0 og r_f , følger

$$S_0 = K_0 + \frac{I}{1 + r_f} - A_0$$

Hva salg-kjøp-pariteten brukes til

- **Finne prisen** på en opsjon når den andre er kjent: kjenner vi K_0 , A_0 og r_f , følger

$$S_0 = K_0 + \frac{I}{1 + r_f} - A_0$$

- **Oppdage arbitrasje:** holder ikke likheten i markedet, kan man tjene en risikofri gevinst ved å kjøpe billig side og selge dyr side

Hva salg-kjøp-pariteten brukes til

- **Finne prisen** på en opsjon når den andre er kjent: kjenner vi K_0 , A_0 og r_f , følger

$$S_0 = K_0 + \frac{I}{1 + r_f} - A_0$$

- **Oppdage arbitrasje:** holder ikke likheten i markedet, kan man tjene en risikofri gevinst ved å kjøpe billig side og selge dyr side
- **Bygge syntetiske posisjoner:** en aksje pluss en salgsopsjon oppfører seg som en kjøpsopsjon pluss et risikofritt innskudd — nyttig for sikring

Paritetseksempel i tall

En aksje handles i $A_0 = 100$. Risikofri rente er $r_f = 5\%$. En europeisk kjøpsopsjon med $I = 100$ og ett års løpetid koster $K_0 = 9$.

Nåverdien av innløsningskursen: $\frac{I}{1 + r_f} = \frac{100}{1,05} = 95,24$.

$$S_0 = K_0 + \frac{I}{1 + r_f} - A_0 = 9 + 95,24 - 100 = 4,24$$



Advarsel

Om en megler tilbyr salgsoptionsen for **3,50**, er den **for billig** relativt til pariteten. Da kjøper du salgsoptionsen og aksjen, selger kjøpsoptionsen og låner **95,24** – og

Idéen: kopier opsjonen

Anta at aksjen i løpet av én periode enten går **opp** til A_0 eller **ned** til nA_0 . Da har kjøpsopsjonen kun to mulige verdier ved forfall:

$$K = \max[0, A_0 - I], \quad K_n = \max[0, nA_0 - I]$$

- Vi lager en **replikerende portefølje** av Δ aksjer og et risikofritt lån B som gir nøyaktig samme to utbetalinger som opsjonen

Idéen: kopier opsjonen

Anta at aksjen i løpet av én periode enten går **opp** til A_0 eller **ned** til nA_0 . Da har kjøpsopsjonen kun to mulige verdier ved forfall:

$$K = \max[0, A_0 - I], \quad K_n = \max[0, nA_0 - I]$$

- Vi lager en **replikerende portefølje** av Δ aksjer og et risikofritt lån B som gir nøyaktig samme to utbetalinger som opsjonen
- Siden porteføljen og opsjonen gir identisk kontantstrøm, må de koste det samme i dag — ellers arbitrasje

Idéen: kopier opsjonen

Anta at aksjen i løpet av én periode enten går **opp** til A_0 eller **ned** til nA_0 . Da har kjøpsopsjonen kun to mulige verdier ved forfall:

$$K = \max[0, A_0 - I], \quad K_n = \max[0, nA_0 - I]$$

- Vi lager en **replikerende portefølje** av Δ aksjer og et risikofritt lån B som gir nøyaktig samme to utbetalinger som opsjonen
- Siden porteføljen og opsjonen gir identisk kontantstrøm, må de koste det samme i dag — ellers arbitrasje
- Prisen på opsjonen er da prisen på den kopierende porteføljen

Replikering og sikringssannsynlighet

Løser vi for Δ og B og samler leddene, kan opsjonsprisen skrives elegant med en **sikringssannsynlighet** (risikonøytral sannsynlighet) q :

$$q = \frac{(1 + r_f) - n}{-n}, \quad K_0 = \frac{q K + (1 - q) K_n}{1 + r_f}$$

i Note

q er **ikke** den virkelige sannsynligheten for at aksjen stiger. Det er den sannsynligheten som ville fått aksjens forventede avkastning til å bli akkurat r_f . Vi diskonterer forventet utbetaling under q med risikofri rente.

Regneeksempel: prise en kjøpsopsjon på én periode

Forutsetninger

- $A_0 = 100$
- Oppfaktor = 1,25, nedfaktor $n = 0,80$
- $r_f = 5\%$ per periode
- Innløsningskurs $I = 100$

Aksjekurs ved forfall

- Opp: $A_0 = 125$
- Ned: $nA_0 = 80$
- Kjøpsopsjonens utbetaling opp:
 $K = \max[0, 125 - 100] = 25$
- Kjøpsopsjonens utbetaling ned:
 $K_n = \max[0, 80 - 100] = 0$

Vi finner først q , deretter prisen.

Regneeksempel: utregningen

Sikringssannsynlighet:

$$q = \frac{(1 + 0,05) - 0,80}{1,25 - 0,80} = \frac{0,25}{0,45} = 0,5556$$

Opsjonspris:

$$K_0 = \frac{0,5556 \times 25 + 0,4444 \times 0}{1,05} = \frac{13,89}{1,05} = 13,23$$



Tips

Legg merke til at vi **aldri** brukte den virkelige sannsynligheten for opp eller ned.

Kontroll via replikerende portefølje

Samme svar via Δ og B . Sikringsforholdet:

$$\Delta = \frac{K - K_n}{A_0 - nA_0} = \frac{25 - 0}{125 - 80} = 0,5556$$

Lånet som gir riktig nedside: $B = \frac{K_n - \Delta nA_0}{1 + r_f} = \frac{0 - 0,5556 \times 80}{1,05} = -42,33.$

$$K_0 = \Delta A_0 + B = 0,5556 \times 100 - 42,33 = 13,23\checkmark$$

Fra én til flere perioder

Med flere perioder bygger vi et **binomisk tre** og regner oss bakover:

- Finn opsjonsverdiene helt til høyre i treet (ved forfall), der de er gitt av $\max[0, A_T - I]$

Fra én til flere perioder

Med flere perioder bygger vi et **binomisk tre** og regner oss bakover:

- Finn opsjonsverdiene helt til høyre i treet (ved forfall), der de er gitt av $\max[0, A_T - I]$
- Bruk samme formel $K_0 = \frac{qK + (1 - q)K_n}{1 + r_f}$ i hver node, ett steg om gangen, fra forfall og tilbake til i dag

Fra én til flere perioder

Med flere perioder bygger vi et **binomisk tre** og regner oss bakover:

- Finn opsjonsverdiene helt til høyre i treet (ved forfall), der de er gitt av $\max[0, A_T - I]$
- Bruk samme formel $K_0 = \frac{qK + (1 - q)K_n}{1 + r_f}$ i hver node, ett steg om gangen, fra forfall og tilbake til i dag
- q og Δ kan endre seg fra node til node, men logikken er identisk i hvert enkelt steg — dette kalles **bakoverinduksjon**

Konvergens mot Black–Scholes

Lar vi antall perioder gå mot uendelig — mange små tidssteg i stedet for noen få store — konvergerer den binomiske prisen mot **Black–Scholes-formelen**:

$$K_0 = A_0 N(d_1) - \frac{I}{(1 + r_f)^T} N(d_2)$$

- $N(\cdot)$ er den kumulative normalfordelingen
- $N(d_1)$ spiller rollen til sikringsforholdet Δ
- Volatiliteten σ erstatter σ og n som mål på usikkerhet
- Samme idé som binomisk: replikering og prising med sikringssannsynligheter

Note

Black–Scholes er ikke en ny teori, men **grensetilfellet** av binomisk prising når han-

Egenkapital som kjøpsopsjon

I et selskap med gjeld kan **egenkapitalen ses som en kjøpsopsjon** på selskapets eiendeler, med innløsningskurs lik gjeldsforpliktelsen G :

- Ved forfall, hvis eiendelsverdien $V_T > G$: eierne betaler gjelden og beholder resten — utbetaling $V_T - G$



Tips

Dette forklarer hvorfor eierne i et kriserammet selskap kan ønske **mer** risiko: høy-

Egenkapital som kjøpsopsjon

I et selskap med gjeld kan **egenkapitalen ses som en kjøpsopsjon** på selskapets eiendeler, med innløsningskurs lik gjeldsforpliktelsen G :

- Ved forfall, hvis eiendelsverdien $V_T > G$: eierne betaler gjelden og beholder resten — utbetaling $V_T - G$
- Hvis $V_T < G$: eierne lar selskapet gå konkurs (begrenset ansvar) — utbetaling 0



Tips

Dette forklarer hvorfor eierne i et kriserammet selskap kan ønske **mer** risiko: høy-

Egenkapital som kjøpsopsjon

I et selskap med gjeld kan **egenkapitalen ses som en kjøpsopsjon** på selskapets eiendeler, med innløsningskurs lik gjeldsforpliktelsen G :

- Ved forfall, hvis eiendelsverdien $V_T > G$: eierne betaler gjelden og beholder resten – utbetaling $V_T - G$
- Hvis $V_T < G$: eierne lar selskapet gå konkurs (begrenset ansvar) – utbetaling 0
- Eierne har altså $\max[0, V_T - G]$ – nøyaktig en kjøpsopsjon på eiendelene med innløsningskurs $I = G$



Tips

Dette forklarer hvorfor eierne i et kriserammet selskap kan ønske **mer** risiko: høy-

Realopsjoner

Mange investeringsbeslutninger inneholder skjulte opsjoner som vanlig nåverdianalyse undervurderer:

Typer realopsjoner

- **Utsettelse:** vente med å investere til usikkerhet oppklares (en kjøpsopsjon på prosjektet)
- **Utvidelse:** skalere opp hvis det går bra
- **Avvikling:** legge ned og selge eiendeler (en salgsopsjon)

Konsekvens

- Fleksibilitet har **positiv** verdi når fremtiden er usikker
- Et prosjekt med negativ tradisjonell nåverdi kan likevel være verdt å starte fordi opsjonen til å vente eller utvide er verdifull



Advarsel

Standard nåverdimetode antar et *nå-eller-aldri*-valg og overser fleksibiliteten. Op-

Det du bør ta med deg

- Opsjonsverdier er begrenset av **arbitrasjefrie grenser** — en kjøpsopsjon ligger mellom $\max[0, A_0 - I/(1 + r_f)]$ og A_0 , og består av egenverdi pluss tidsverdi
- **Salg-kjøp-pariteten (SKP)** $K_0 - S_0 = A_0 - \frac{I}{1 + r_f}$ binder kjøps- og salgsopsjonen sammen og avslører arbitrasje
- **Binomisk prising** kopierer opsjonen med aksjer og lån; sikringssannsynligheten $q = \frac{(1 + r_f) - n}{-n}$ gir prisen $K_0 = \frac{qK + (1 - q)K_n}{1 + r_f}$ — uten virkelige sannsynligheter
- Black-Scholes er **grensen** av binomisk prising; egenkapital og realopsjoner er opsjoner i forkledning

Til neste gang

- Neste forelesning (14) er **oppsummering og eksamenstrening**: vi knytter sammen avkastningskrav, kapitalstruktur, dividendepolitikk og opsjoner, og regner oppgaver i eksamensformat
- Repeter regneeksempelet på binomisk prising til du gjør det uten å tenke — finn q først, så K_0
- Øv på salg-kjøp-pariteten begge veier: finn S_0 gitt K_0 , og finn K_0 gitt S_0
- Les ferdig BMN kapittel 12 og noter spørsmål til repetisjonen